MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Határozd meg az x, y és z valós számok legkisebb értékét úgy, hogy az

$$A = \sqrt{x^2-2} + \sqrt{y^2-3} + \sqrt{z^2+5}$$

értéke a lehető legkisebb legyen!

b) Igazold, hogy a B valós szám legkisebb értéke 6-tal egyenlő, ahol

$$B = \sqrt{9x^2+6\sqrt{2}x+11} + \sqrt{9y^2+6\sqrt{3}y+7} + \sqrt{9z^2+6\sqrt{5}z+6}.$$

c) Keress olyan x, y és z valós számokat, amelyekre a C értéke 6-tal egyenlő, ahol

$$C = \sqrt{xy-2y+3x-5} + \sqrt{yz-y+3z+1} + \sqrt{xz-x-2z+11}.$$

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az A értéke akkor a lehető legkisebb, ha az összeg első két tagja 0-val egyenlő és a $\sqrt{z^2+5}$ a lehető legkisebb. **(1 pont)**
Azaz $\sqrt{x^2-2}=0$, ahonnan $x^2=2$, így $x=\pm\sqrt{2}$.
Hasonlóan $y=\pm\sqrt{3}$, valamint $z^2+5\geq 5, \forall z\in\mathbb{R}$ esetén. **(1 pont)**
Mivel x, y és z a lehető legkisebb, ezért $x=-\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{3}$ és $z=0$. **(1 pont)**

b) $B = \sqrt{(3x+\sqrt{2})^2+9} + \sqrt{(3y+\sqrt{3})^2+4} + \sqrt{(3z+\sqrt{5})^2+1}.$ **(1 pont)**
Mivel $B\geq\sqrt{9}+\sqrt{4}+\sqrt{1}=6$, ezért a $3x+\sqrt{2}, 3y+\sqrt{3}$ és $3z+\sqrt{5}$ értékei 0-val kell egyenlőek legyenek. **(1 pont)**
Így $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}, y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $z=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **(1 pont)**

c) A négyzetgyökök alatti kifejezéseket átírva kapjuk, hogy
$C=\sqrt{(x-2)(y+3)+1}+\sqrt{(y+3)(z-1)+4}+\sqrt{(z-1)(x-2)+9}.$ **(1 pont)**
Mivel a négyzetgyökök alatti szorzatok az összeg tagjaiban páronként megegyeznek, és
$\sqrt{9}+\sqrt{4}+\sqrt{1}=6,$ **(1 pont)**
így $x=2, y=-3$ és $z=1$ megoldása az egyenletnek. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). a) Határozd meg az a számjegy azon értékét, amelyre $\sqrt{\overline{aa}-51} = 7-a$.
b) Igazold, hogy az

$$\frac{1}{x-2022} + \frac{1}{x-2008} = \frac{1}{x-2020} + \frac{1}{x-2010}$$

egyenletnek van megoldása az egész számok halmazán!

Csáki Ferenc, Sárköz
Matlap 2022/10, A:4661

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az $a \neq 0, \overline{aa} > 51$ **(1 pont)**
és írhatjuk, hogy
$\sqrt{\overline{aa}-51} = 7-a \Leftrightarrow \overline{aa}-51 = (7-a)^2 \Leftrightarrow 11a-51 = 49-14a+a^2 \Leftrightarrow a^2-25a+100 = 0$ **(1 pont)**
$a^2-5a-20a+100 = 0 \Leftrightarrow a(a-5)-20(a-5) = 0 \Leftrightarrow (a-5)(a-20) = 0$, amely egyenlet megoldásai $a_1 = 5$ és $a_2 = 20$. **(1 pont)**
Mivel a számjegy, elfogadható megoldás $a = 5$. **(1 pont)**

b) Legyen $x-2022 = y-7$.
Ekkor $x-2008 = y+7, x-2020 = y+5$ és $x-2010 = y-5$. **(1 pont)**
Az egyenlet rendre így írható

$$\frac{1}{y-7} + \frac{1}{y+7} = \frac{1}{y+5} + \frac{1}{y-5} \Leftrightarrow \frac{y+7+y-7}{y^2-7^2} = \frac{y-5+y+5}{y^2-5^2} \Leftrightarrow \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$2y(y^2-25)-2y(y^2-49) = 0 \Leftrightarrow 2y(y^2-25-y^2+49) = 0 \Leftrightarrow \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$24 \cdot 2y = 0 \Rightarrow y = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ekkor $x-2022 = -7$, ahonnan $x = 2015 \in \mathbb{Z}$. Tehát az egyenletnek van megoldása az egész számok halmazán. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $a \neq 0, \overline{aa} > 51$, ezért $a \geq 5$. **(1 pont)**
De $\sqrt{\overline{aa}-51} \geq 0$, így $7-a \geq 0$, ahonnan következik, hogy $a \leq 7$. **(1 pont)**
Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy $a = 5$ megoldás, **(1 pont)**
míg $a = 6$ és $a = 7$ nem megoldások. **(1 pont)**

b) Észrevesszük, hogy $2022+2008 = 4030$ és $2020+2010 = 4030$. **(1 pont)**
Legyen $x-2022 = y+a$ és $x-2008 = y-a \Rightarrow 2x-4030 = 2y \Rightarrow x = y+2015$, **(1 pont)**
amit behelyettesítünk az adott egyenletbe és kapjuk, hogy

$$\frac{1}{y+2015-2022} + \frac{1}{y+2015-2008} = \frac{1}{y+2015-2020} + \frac{1}{y+2015-2010} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{y-7} + \frac{1}{y+7} = \frac{1}{y-5} + \frac{1}{y+5} \Leftrightarrow \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\frac{y+7+y-7}{y^2-49} = \frac{y+5+y-5}{y^2-25} \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2-49} = \frac{2y}{y^2-25} \Rightarrow y = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $x = y+2015$ kapjuk, hogy $x = 2015 \in \mathbb{Z}$. Tehát az egyenletnek van megoldása az egész számok halmazán. **(1 pont)**

■

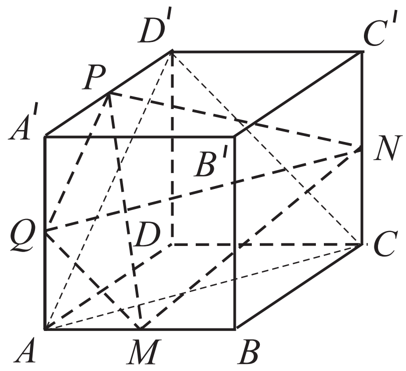
3. feladat (10 pont)**.** Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában M, N, P és Q az $AB, CC', D'A'$ és AA' élek felezőpontjai. Igazold, hogy:

a) az MNP háromszög egyenlő oldalú;
b) a Q pont eleme az MNP síknak;
c) az MNP és $D'AC$ síkok párhuzamosak!

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Elkészítjük a következő ábrát.



Legyen $AB = a \Rightarrow MB = NC = \frac{a}{2}$ és $BC = a$. A BMN és CNB derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele alapján $MN^2 = BM^2 + BN^2$ és $BN^2 = BC^2 + CN^2$, tehát

$$MN^2 = BM^2 + BC^2 + CN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{6a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

(**2 pont**)

Hasonlóan kiszámíthatjuk az MP és NP szakaszok hosszát is, és azt kapjuk, hogy $MN = NP = PM$, tehát az MNP háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)

b) A $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, QN = a\sqrt{2}$ és $PN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ szakaszokra teljesül a $QN^2 = PQ^2 + PN^2$ egyenlőség, ezért Pitagorasz tételének fordított tétele alapján $NP \perp PQ$, tehát a PQN háromszög derékszögű. (**1 pont**)

Mivel $PQ = \frac{QN}{2} \Rightarrow \widehat{PNQ} = 30^o$. (**1 pont**)

Hasonlóan $\widehat{MNQ} = 30^o$, tehát $\widehat{PNM} = \widehat{PNQ} + \widehat{QNM} \Rightarrow Q \in (MNP)$. (**1 pont**)

c) Az előző alpont alapján az MNP sík azonos az $MNPQ$ síkkal. Ezt a továbbiakban figyelembe vesszük. A PQ szakasz középvonal az $A'AD'$ háromszögben, így $PQ \parallel D'A$. (**1 pont**)
Az MQ szakasz középvonal az $AA'B$ háromszögben, ezért $MQ \parallel A'B$, de $A'B \parallel D'C \Rightarrow MQ \parallel D'C$. (**1 pont**)
Mivel $PQ \parallel D'A$ és $MQ \parallel D'C$, így $(MNP) \parallel (D'AC)$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Mivel $BMC_\triangle \equiv C'ND'_\triangle \equiv A'PA_\triangle \Rightarrow MC = D'N = AP$. (**1 pont**)
Az $MNC_\triangle \equiv NPD'_\triangle \equiv MPA'_\triangle$, mert $NC = D'P = AM$, $MC = D'N = AP$ és derékszögű háromszögek (befogó-befogó eset) (**1 pont**)
Így $MN = NP = PM$, tehát az MNP háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)

b) A PQ szakasz középvonal az $A'AD'$ háromszögben, ezért $PQ \parallel D'A$. (**1 pont**)
Az $ACNQ$ téglalap, ezért $QN \parallel AC$. (**1 pont**)
Az MQ szakasz középvonal az $AA'B$ háromszögben, ezért $MQ \parallel A'B$, de $A'B \parallel D'C \Rightarrow MQ \parallel D'C$. (**1 pont**)
A $PQ \parallel D'A$, $QN \parallel AC$ és $MQ \parallel D'C$ alapján a PQ, QN és QM egyenesek párhuzamosak a $D'AC$ sík egy-egy egyenesével, tehát párhuzamosak a $D'AC$ síkkal is. Így a Q pontból kiinduló QP, QN és QM egyenesek egy síkban vannak. (**2 pont**)

c) Az előbbi állításból azonnal következik, hogy $(MNP) \parallel (D'AC)$. (**1 pont**)

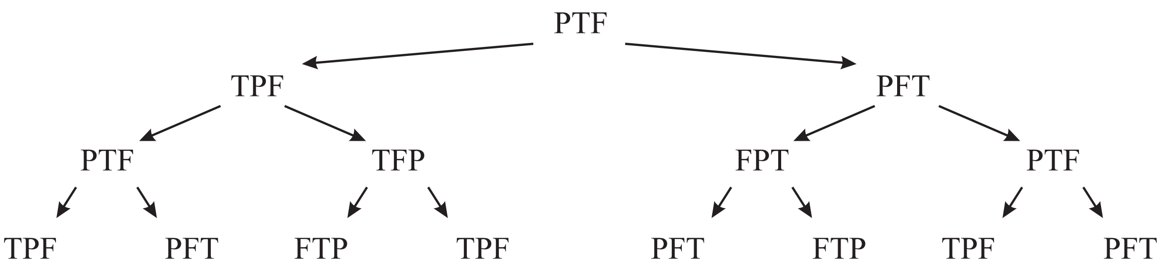
■

4. feladat (10 pont)**.** A Kerekerdőben található nagy tölgyfa közelében egy hosszú, egyenes árokban Nyúl Péter testvérei, Pamacs, Tapsi és Füles játszanak. Bal oldalon Pamacs, középen Tapsi, jobb oldalon pedig Füles ül. Időnként valamelyik átugorja egyik szomszédját. Előfordulhat-e, hogy 2023 ugrás után újra a kiinduló sorrendben ülnek, ha végig csak az árokban (egy egyenes mentén) ugrálnak?

Jakab-Medvessi Andrea-Alice, Kolozsvár
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Máthé Attila István, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Jelöljük a három testvért nevük kezdőbetűje alapján P, T, illetve F betűkkel, a kezdeti sorrendet pedig a PTF kóddal.
Mivel minden ugrás alkalmával vagy a két szélső testvér valamelyike ugrik be a másik kettő közé (TPF vagy PFT), vagy a középső ugrik ki bal (TPF) vagy jobb (PFT) oldalra, ezért a kezdeti állapotból egy ugrás után csak a TPF vagy PFT sorrend valamelyike alakulhat ki. (**2 pont**)
Általában, bármely ABC állapotból egy lépés után csak a BAC vagy ACB állapotok valamelyike jöhet létre. (**1 pont**)
Ennek megfelelően a következő sorrendek alakulhatnak ki:



Megfigyelhető, hogy a hat PTF, PFT, TPF, TFP, FPT, FTP sorrend közül minden páratlan sorszámú ugrás után csak a TPF, PFT vagy az FTP valamelyike, míg (**2 pont**)
minden páros sorszámú ugrás után a PTF, TFP, FPT sorrend valamelyik alakulhat ki. (**1 pont**)
Mivel 2023 páratlan, és a kezdeti PTF sorrend csak páros számú ugrás után érhető el, (**2 pont**)
ezért a testvérek *nem lehetnek* a 2023. ugrás után a kezdeti sorrendben. (**1 pont**)

■