V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

X. osztály

1. feladat (10 pont). a) Adottak az $x, y \in (1, 2022)$ számok, amelyekre fennáll az $x^2+y^2 = 2023^2$ összefüggés. Bizonyítsd be, hogy

$$\log_{2023-x} y + \log_{2023+x} y = 2 \cdot \log_{2023-x} y \cdot \log_{2023+x} y.$$

b) Igazold, hogy bármely $a, b, c > 1$ valós számok esetén

$$\sqrt{\log_a(b^{\log_a b}) + \log_b(c^{\log_b c})} + \sqrt{\log_b(a^{\log_b a}) + \log_c(b^{\log_c b})} \geq 2\sqrt{2}.$$

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $x, y \in (1, 2022)$, ezért a $\log_{2023-x} y$, $\log_{2023+x} y$, $\log_y(2023-x)$, $\log_y(2023+x)$ értelmezettek és nem nullák. A $\log_{2023-x} y + \log_{2023+x} y = 2 \cdot \log_{2023-x} y \cdot \log_{2023+x} y$ azonosság átírható

$$\frac{1}{\log_y(2023-x)} + \frac{1}{\log_y(2023+x)} = 2 \cdot \frac{1}{\log_y(2023-x)} \cdot \frac{1}{\log_y(2023+x)} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

alakba. A bal oldalt közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\log_y(2023-x) + \log_y(2023+x)}{\log_y(2023-x) \cdot \log_y(2023+x)} = 2 \cdot \frac{1}{\log_y(2023-x)} \cdot \frac{1}{\log_y(2023+x)} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\iff \frac{\log_y(2023^2-x^2)}{\log_y(2023-x) \cdot \log_y(2023+x)} = 2 \cdot \frac{1}{\log_y(2023-x)} \cdot \frac{1}{\log_y(2023+x)}.$$

Felhasználva az $x^2 + y^2 = 2023^2$ egyenlőséget az azonosságunk a

$$\frac{\log_y y^2}{\log_y(2023-x) \cdot \log_y(2023+x)} = \frac{2}{\log_y(2023-x) \cdot \log_y(2023+x)}$$

igaz egyenlőség formájába írható át. **(2 pont)**

b) A megadott egyenlőtlenségben a következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\sqrt{\log_a(b^{\log_a b}) + \log_b(c^{\log_b c})} + \sqrt{\log_b(a^{\log_b a}) + \log_c(b^{\log_c b})} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\iff \sqrt{\log_a b \cdot \log_a b + \log_b c \cdot \log_b c} + \sqrt{\log_b a \cdot \log_b a + \log_c b \cdot \log_c b} \geq 2\sqrt{2} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\iff \sqrt{\log_a^2 b + \log_b^2 c} + \sqrt{\log_b^2 a + \log_c^2 b} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\iff \sqrt{\log_a^2 b + \log_b^2 c} + \sqrt{\frac{1}{\log_a^2 b} + \frac{1}{\log_b^2 c}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Mivel $a, b, c > 1$, ezért a $\log_a b$, $\log_b c$ pozitív valós számok. Bevezetve a $p = \log_a b > 0$ és $q = \log_b c > 0$ jelöléseket a kapott egyenlőtlenség

$$\sqrt{p^2+q^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}} \geq 2\sqrt{2} \tag{1}$$

alakban írható. **(1 pont)**
Felhasználva a

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}, \quad \forall\, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Minkowski-egyenlőtlenséget az $a_1 = p$, $a_2 = q$, $b_1 = \frac{1}{p}$, $b_2 = \frac{1}{q}$ számokra, illetve a minden $x > 0$ esetén fennálló $x + \frac{1}{x} \geq 2$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy **(1 pont)**

$$\sqrt{p^2+q^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}} \geq \sqrt{\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2} \geq \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Megjegyzés. Minden $p, q > 0$ esetén az (1) egyenlőtlenség igazolható a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával is:

$$\sqrt{p^2+q^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{p^2q^2}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{p^2q^2}}} = \sqrt{2pq} + \sqrt{\frac{2}{pq}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2pq}\cdot\sqrt{\frac{2}{pq}}} = 2\sqrt{2}.$$

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $a \in \mathbb{R}$ és $b > 0$ esetén adottak a $z_1 = a + b \cdot i$ és $z_2 = \dfrac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}}$ komplex számok úgy, hogy $z_1 - z_2$ és z_2^2 valósak. Határozd meg a z_1 és z_2 komplex számokat!

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $z_2 = c + di$, ahol $c, d \in \mathbb{R}$. Ekkor $z_1 - z_2 = a + bi - c - di = a - c + (b-d)i$ és a $z_1 - z_2 \in \mathbb{R}$ feltételből kapjuk, hogy $b = d$. **(1 pont)**
A $z_2^2 = (c+di)^2 = c^2 + 2cdi - d^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$ és a $z_2^2 \in \mathbb{R}$ feltételből adódik, hogy $2cd = 0$. Innen a $d = b > 0$ alapján következik, hogy $c = 0$. **(1 pont)**
Azt kaptuk, hogy $z_2 = c + di = bi$. **(1 pont)**
A z_2 értelmezése alapján

$$\begin{aligned} z_2 = \frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}} &= \frac{1-\overline{(a+bi)}}{1+\overline{(a+bi)}} = \frac{1-(a-bi)}{1+(a-bi)} = \frac{1-a+bi}{1+a-bi} \\ &= \frac{1-a^2+bi+abi+bi-abi+b^2i^2}{(1+a)^2-b^2i^2} \\ &= \frac{1-a^2-b^2}{(1+a)^2+b^2} + \frac{2b}{(1+a)^2+b^2}i. \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

A z_2-re vonatkozó összefüggések alapján az $ib = \frac{1-a^2-b^2}{(1+a)^2+b^2} + \frac{2b}{(1+a)^2+b^2}i$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan

$$1 - a^2 - b^2 = 0 \quad \text{és} \quad \frac{2b}{(1+a)^2+b^2} = b. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $b > 0$, így az utóbbi egyenlőség egyenértékű a $2 = (1+a)^2 + b^2$ egyenlőséggel, amely átírható $1 - a^2 - b^2 = 2a$ alakba. Innen kapjuk, hogy $a = 0$. Ezt visszahelyettesítve az $1 - a^2 - b^2 = 0$ összefüggésbe kapjuk, hogy $b = 1$ a $b > 0$ feltétel miatt. (**2 pont**)
Tehát a keresett két komplex szám $z_1 = z_2 = i$. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ számok esetén

$$(2^{x-y} + 2^{z-y} - 1)(2^{y-z} + 2^{x-z} - 1)(2^{z-x} + 2^{y-x} - 1) \leq 1.$$

Határozd meg, mikor áll fenn egyenlőség!

Longáver Lajos, Nagybánya
Matlap 9/2022 L: 3503

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Bevezetve a $2^x = a > 0$, $2^y = b > 0$, $2^z = c > 0$ jelöléseket az eredeti egyenlőtlenség

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c} - 1\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a} - 1\right) \leq 1$$

alakba írható, amely egyenértékű az

$$(a + c - b)(b + a - c)(c + b - a) \leq abc \tag{2}$$

egyenlőtlenséggel. (**2 pont**)
Mivel az egyenlőtlenség jobb és bal oldalán szereplő kifejezések szimmetrikusak, feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c$. Ekkor $a + c - b \geq 0$ és $b + a - c \geq 0$. (**1 pont**)
Ha $c + b - a \leq 0$, akkor a bal oldal nem pozitív, a jobb oldal pozitív, tehát az egyenlőtlenség igaz. (**1 pont**)
Ha $c + b - a > 0$, akkor az egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük, mert mindkét oldal pozitív, és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&[a + (c - b)][a - (c - b)][b + (a - c)][b - (a - c)][c + (b - a)][c - (b - a)] \leq a^2b^2c^2 \\ &\iff [a^2 - (c - b)^2][b^2 - (a - c)^2][c^2 - (b - a)^2] \leq a^2b^2c^2.\end{aligned}$$ (**3 pont**)

Mivel $0 \leq a^2 - (c - b)^2 \leq a^2$, $0 \leq b^2 - (a - c)^2 \leq b^2$ és $0 \leq c^2 - (b - a)^2 \leq c^2$, ezért az utóbbi egyenlőtlenség igaz. (**1 pont**)
Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = c$, amely egyenértékű az $x = y = z$ egyenlőségekkel az exponenciális függvény bijektivitása miatt. (**1 pont**)

Megjegyzés. Ha a (2) egyenlőtlenség bal oldalán mindhárom zárójel pozitív, akkor bevezetve az $\alpha = a + c - b$, $\beta = b + a - c$, $\gamma = c + b - a$ jelöléseket a (2) egyenlőtlenség

$$\alpha\beta\gamma \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

alakba írható, mely igazolható a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával is.

■

4. feladat (10 pont)**.** Adott egy 11×11-es négyzetháló, amelynek négyzeteibe beírjuk a természetes számokat 1-től 121-ig valamilyen sorrendben. Igazold, hogy a négyzethálónak van olyan 2×2-es része, amelyben található négy szám összege legalább 210.

(***)

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A négyzethálón összesen 100 darab 2×2-es négyzet van, (**2 pont**)
amelyekben a számok összege növekvő sorrendben $S_1 \leq S_2 \leq ... \leq S_{100}$. (**2 pont**)
Ezek összege $S = S_1 + S_2 + ... + S_{100}$. Ugyanakkor az S három másik összegből is megkapható. A 11×11-es négyzetháló négy sarkában lévő szám mindegyike egyetlen 2×2-es négyzetben szerepel. Jelölje A_1 ezen négy szám összegét. A 11×11-es négyzetháló szélein szereplő számok, kivéve a sarkokban szereplőket, pontosan két 2×2-es négyzetben szerepelnek. Jelölje A_2 ezen számok összegét. A 9×9-es belső négyzetekben található számok pontosan négy 2×2-es négyzetben szerepelnek. Jelölje A_3 ezen számok összegét. Tehát

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + ... + S_{100} = A_1 + 2 \cdot A_2 + 4 \cdot A_3 \\ &\geq (118 + 119 + 120 + 121) + 2 \cdot (82 + 83 + ... + 117) + 4 \cdot (1 + 2 + ... + 81) \\ &= 20926. \end{aligned}$$

(**4 pont**)

Mivel a $20926 : 100 = 209{,}26 > 209$, ezért az $S_1, S_2, ..., S_{100}$ összegek közül legalább az egyik összeg legalább 210 kell, hogy legyen. (**1 pont**)

■