



## V. Országos Magyar Matematikaolimpia

## XXXII. EMMV

megyei szakasz, 2023. február 4.

## V. osztály

1. feladat (10 pont). Adott a  $2, 5, 8, 11, 14, \dots$  számsorozat.

a) Állapítsd meg milyen szabály szerint követik egymást a sorozat tagjai, majd írd fel a következő hat tagot.

b) Ha a sorozat első 2022 tagját négyzetre emeljük és ezeket összeadjuk, mi lesz az eredmény utolsó számjegye?

Matlap 9/2022, A: 4626

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Vizsgáljuk az egymás utáni tagok különbségét:  $5 - 2 = 3, 8 - 5 = 3, 11 - 8 = 3, 14 - 8 = 3$ . Láthatjuk, hogy mind a négy esetben 3-at kaptunk, így megfogalmazható a szabály: a sorozat minden tagja az előző tagnál 3-mal nagyobb, vagy a következő tagot úgy kapjuk, hogy az előző taghoz hozzáadunk 3-at.

(1 pont)

Így a soron következő hat tag:  $14 + 3 = 17, 17 + 3 = 20, 20 + 3 = 23, 23 + 3 = 26, 26 + 3 = 29$  és  $29 + 3 = 32$ .

(1 pont)

b) A sorozat négyzetre emelt tagjainak utolsó számjegyét vizsgáljuk, mert az összeg utolsó számjegye ezektől fog függni.

(1 pont)

A sorozat eddig meghatározott tagjainak utolsó számjegye:  $2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9, 2$ . A sorozat további tagjai  $35, 38, 41, 44, 47, 50, \dots$

Utolsó számjegyeik, a 2-es után,  $5, 8, 1, 4, 7, 0, \dots$  és így tovább.

(1 pont)

Észrevevesszük, hogy a sorozat tagjainak utolsó számjegye 10-esével ismétlődik.

(1 pont)

Megvizsgáljuk, hogy az első 10 tag utolsó számjegyének a négyzete milyen számjegyre végződik. A következő számjegyeket kapjuk:  $4, 5, 4, 1, 6, 9, 0, 9, 6, 1$ .

(1 pont)

A négyzetek utolsó számjegyének összege:  $4 + 5 + 4 + 1 + 6 + 9 + 0 + 9 + 6 + 1 = 45$ .

(1 pont)

Mivel a tagok utolsó számjegyeiből alkotott sorozat 10-esével ismétlődik, a négyzeteik utolsó számjegyeiből alkotott sorozat is 10-esével fog ismétlődni. 2022 tag négyzeteinek utolsó számjegye esetén 202-szer ismétlődik és még marad két tag négyzetének utolsó számjegye, a 4 és 5.

(1 pont)

Ezek szerint a  $202 \cdot 45 + 4 + 5$  utolsó számjegyét keressük, ami pontosan 9. Tehát a tagok négyzetei összegének utolsó számjegye 9.

(1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a)  $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 11, \dots, a_n = 3 \cdot (n - 1) + 2$ , ahol  $n$  természetes szám.

(1 pont)

A következő tagok:  $a_6 = 3 \cdot 5 + 2 = 17, a_7 = 3 \cdot 6 + 2 = 20, a_8 = 3 \cdot 7 + 2 = 23, a_9 = 3 \cdot 8 + 2 = 26,$

$$a_{10} = 3 \cdot 9 + 2 = 29, a_{11} = 3 \cdot 10 + 2 = 32. \quad (1 \text{ pont})$$

b) Folytatjuk a sorozatot, még felírunk pár tagot:  $a_{12} = 3 \cdot 11 + 2 = 35, a_{13} = 3 \cdot 12 + 2 = 38$ . Látható, hogy a sorozat első tíz tagjának az utolsó számjegye különböző viszont a 11., 12., 13. tag utolsó számjegye azonos az első három tag utolsó számjegyével.

Az utolsó számjegyek tízesével ismétlődnek. (1 pont)

Tehát az összeg  $202 \cdot 10 + 2$  tagot tartalmaz. (1 pont)

Az utolsó két tag pedig:  $a_{2021} = 3 \cdot 2020 + 2 = 6062, a_{2022} = 3 \cdot 2021 + 2 = 6065$  (1 pont)

Továbbá felírható az összeg:  $2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 26^2 + 29^2 + 32^2 + \dots + 6062^2 + 6065^2$

Az összeg utolsó számjegye:

$$u(2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 26^2 + 29^2 + 32^2 + \dots + 6062^2 + 6065^2) = \quad (1 \text{ pont})$$

$$u[202 \cdot (4 + 5 + 4 + 1 + 6 + 9 + 0 + 9 + 6 + 1) + 4 + 5] = \quad (1 \text{ pont})$$

$$u(202 \cdot 45 + 9) = \quad (1 \text{ pont})$$

$$u(9099) = 9 \quad (1 \text{ pont})$$



**2. feladat** (10 pont). Egy mókus a tölgyfa, a bükkfa és a jegenyefa odújába összesen 156 makkot és mogyorót gyűjtött össze fáradságos munkával. A tölgyfa odújába a makkok száma megegyezik a mogyorók számával. A bükkfa odújában 6-tal kevesebb termés került, mint a tölgyfaodúba, de kétszer több makk, mint mogyoró. A jegenyefa odújában 12 darab terméssel kevesebbet szedett össze, mint a bükkfaodúba, de kétszer annyi mogyorót, mint makkot.

a) Hány makk van a jegenyefa odújában?

b) Hány mogyorót gyűjtött összesen a mókus?

*Hamar Erzsébet, Masrosvásárhely*

*Első megoldás.* Hivatalból (1 pont)

a) Legyen egy szakasz hossza a jegenyefa odújában található makkok száma, amit jelölünk  $x$ -szel:

$$\left. \begin{array}{l} \text{J-fa: } \overline{\quad\quad\quad} \\ \text{B-fa: } \overline{\quad\quad\quad} \overset{12}{\quad\quad\quad} \\ \text{T-fa: } \overline{\quad\quad\quad} \overset{12}{\quad\quad\quad} \overset{6}{\quad\quad\quad} \end{array} \right\} 156 \quad (2 \text{ pont})$$

$$9x + 2 \cdot 12 + 6 = 156 \quad (1 \text{ pont})$$

$$9x = 126 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x = 14, \text{ tehát } 14 \text{ makkot gyűjtött a mókus a jegenyefa odújába.} \quad (1 \text{ pont})$$

b) A jegenyefa odújában a mogyorók száma  $= 2 \cdot 14 = 28$  (1 pont)

A bükkfa odújában a mogyorók száma  $= (14 + 28 + 12) : 3 = 18$  (1 pont)

A tölgyfa odújában a mogyorók száma  $= (14 + 28 + 12 + 6) : 2 = 30$  (1 pont)

Összesen:  $28 + 18 + 30 = 76$  mogyorót gyűjtött a mókus. (1 pont)



Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Mivel a tölgyfába tett mogyorók száma megegyezik a makkok számával ezért  $2 \cdot m$  mennyiségű termés található ebben az odúban. ( $m$  a termések számának fele a tölgyfaodúban). A bükkfába gyűjtött termések száma 6-tal kevesebb, mint ami a tölgyfában található, vagyis  $2 \cdot m - 6$ . A jegenyefában ehhez képest 12-vel kevesebb darab van, ami azt jelenti, hogy 18-cal kevesebb a darabszám, mint a tölgyfa odújában, vagyis  $2 \cdot m - 18$ .

(2 pont)

Összesen az egyes faodvakban:

$$2 \cdot m + 2 \cdot m - 6 + 2 \cdot m - 18 = 156 \text{ termés található}$$

(1 pont)

$$6 \cdot m = 156 + 6 + 18$$

$$6 \cdot m = 180$$

$$m = 30 \text{ darab termés}$$

(1 pont)

A jegenyefában lévő termések száma  $2 \cdot m - 18 = 2 \cdot 30 - 18 = 42$  darab. Mivel itt a mogyorók száma duplája a makkok számának, ezért három rész termés található, amiből egy rész a makkok száma, így  $42 : 3 = 14$  darab makk van a jegenyeodúban.

(1 pont)

b) A fentiekből következik, hogy a tölgyfa odújában 30 mogyoró, míg a jegenyében 28 darab mogyoró található.

(1 pont)

(1 pont)

A bükkfába  $2 \cdot m - 6 = 2 \cdot 30 - 6 = 54$  darab termést gyűjtött a mókus. Mivel a makkok száma kétszer több a mogyorók számánál, ezért három rész termés található itt. Ebből egy rész 18 darabot jelent, ami pontosan a mogyorók darabszámát adja.

(1 pont)

Tehát a mókus összesen  $30 + 18 + 28 = 76$  mogyorót gyűjtött a három fa odújába.

(1 pont)

■

**3. feladat** (10 pont). a) Írd fel az összes eddig előfordult, időszámításunk szerinti (Krisztus utáni) évszámot, amelyik csak a  $7^a$  és  $17^b$  szorzótényezőket tartalmazza, ahol  $a, b$  természetes szám!

b) Legközelebb hány év múlva fordul elő ilyen tulajdonságú évszám a jövőben?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a)  $0 < 7^a \cdot 17^b \leq 2023$ , mivel  $2023 = 7 \cdot 17^2$ .

(1 pont)

Felírjuk az összes lehetséges esetet

$$a = 0 \text{ és } b = 0, 7^0 \cdot 17^0 = 1,$$

$$a = 0 \text{ és } b = 1, 7^0 \cdot 17^1 = 17,$$

(1 pont)

$$a = 0 \text{ és } b = 2, 7^0 \cdot 17^2 = 289,$$

$$a = 1 \text{ és } b = 0, 7^1 \cdot 17^0 = 7,$$

(1 pont)

$$a = 1 \text{ és } b = 1, 7^1 \cdot 17^1 = 119,$$

$$a = 1 \text{ és } b = 2, 7^1 \cdot 17^2 = 2023,$$

(1 pont)

$$a = 2 \text{ és } b = 0, 7^2 \cdot 17^0 = 49,$$

$$a = 2 \text{ és } b = 1, 7^2 \cdot 17^1 = 833,$$

(1 pont)

$$a = 3 \text{ és } b = 0, 7^3 \cdot 17^0 = 343.$$

Tehát a keresett, időszámításunk szerinti évszámok: 1, 7, 17, 49, 119, 289, 343, 833, 2023.

(1 pont)

b) A hatványkitevőket rendre eggyel növelve, felírjuk a fenti esetek rákövetkezőit:

$$7^0 \cdot 17^3 = 4913, 7^1 \cdot 17^3 = 34391, 7^2 \cdot 17^2 = 14161, 7^3 \cdot 17^1 = 5831, 7^4 \cdot 17^0 = 2401.$$

(1 pont)

Látható, hogy  $2401 < 4913 < 5831 < 14161 < 34391$  (1 pont)

Tehát a következő ilyen tulajdonságokkal rendelkező évszám a 2401.

Így  $2401 - 2023 = 378$  év múlva fordul újra elő. (1 pont)

■

#### 4. feladat (10 pont).

Gombóc Artúr egy lekódolt széfben tartja a legritkább csokoládéit. Ahhoz, hogy ki tudja nyitni a széfet egy négy számjegyből álló számot kell beírnia, ahogy az ábrán a digitális kijelző is mutatja. Ha véletlenül elrontja a kódot, akkor 5 percet kell várnia, hogy újabb kóddal próbálkozhasson.

Gombóc Artúr csak vasárnaponként ebéd után pontosan 15:00 órakor falatozik a csokoládékból. Egyik vasárnap viszont, amikor 10:00 órakor elő akarta készíteni a csokoládékat, nem jutott eszébe a kód, hogy kinyithassa a széf ajtaját. Arra emlékezett viszont, hogy a kód két középső számjegye páros, míg a két szélén lévő páratlan, ugyanakkor nincs benne két azonos számjegy, valamint van közöttük 0-ás és 1-es.

	7	8	9
	4	5	6
	1	2	3
	0	x	✓

a) Ki tudja-e próbálni az összes lehetőséget Gombóc Artúr úgy, hogy 15:00 órakor biztosan ehessen a ritka csokoládékból?

b) Hányszorosára nőtt volna a lehetséges kódok száma, ha Gombóc Artúr úgy emlékszik, hogy a kód két középső számjegye páros, míg a két szélén lévő páratlan, valamint, hogy nem volt közöttük 0-ás és 1-es?

*Polgár István, Gyergyószentmiklós*

*Első megoldás. Hivatalból* (1 pont)

a) A kód a következő minták közül kerülhet ki:

1. 

1	0	páros	páratlan
---	---	-------	----------
2. 

1	páros	0	páratlan
---	-------	---	----------
3. 

páratlan	0	páros	1
----------	---	-------	---
4. 

páratlan	páros	0	1
----------	-------	---	---

A páros számjegyek a 0, 2, 4, 6, 8, ezek közül a 0 már nem lehet, mivel egyforma számjegyek nem szerepelnek a kódban. Így a lehetséges páros számjegyek a 2, 4, 6, 8. A páratlan számjegyek az 1, 3, 5, 7, 9, ezek közül az 1 már nem lehet, mivel egyforma számjegyek nem szerepelnek a kódban. Így a lehetséges páratlan számjegyek a 3, 5, 7, 9. A minták mindegyikében egy páros és egy páratlan számjegy hiányzik, így elegendő egy mintát megvizsgálni, majd az ott megjelölt lehetőségek számát megszorozni 4-gyel. Az első mintát választva az első 4 lehetőség: 

1	0	2	3
---	---	---	---

1	0	2	5
---	---	---	---

1	0	2	7
---	---	---	---

1	0	2	9
---	---	---	---

. A további lehetőségek is hasonlóan alakulnak, csak 2 helyett a 4, 6 és 8 számjegyekkel, a harmadik pozíción.

Tehát  $4 \cdot 4 = 16$  lehetőség van összesen az első minta esetén. (2 pont)

Ezt még 4-gyel megszorozva kapjuk, hogy  $16 \cdot 4 = 64$  kódot kell kipróbáljon Gombóc Artúr, ami  $64 \cdot 5 = 320$  percbe kerül. (1 pont)

10:00 órától 15:00 óráig pontosan 5 órája, vagyis 300 perce van Artúrnak.

Tehát nem elegendő az idő az összes kód kipróbálására, így 15:00 órakor Artúr nem biztos, hogy ehet a ritka csokoládéból. **(1 pont)**

b) A kód csupán egy mintát követhet: 

páros	páratlan	páratlan	páros
-------	----------	----------	-------

. A páros számjegyek a 0, 2, 4, 6, 8, ezek közül a 0 nem lehet, mert Artúr úgy emlékezett, hogy a 0-as nem szerepel a kódban. Így a lehetséges páros számjegyek a 2, 4, 6, 8. A páratlan számjegyek az 1, 3, 5, 7, 9, ezek közül az 1 nem lehet, mert Artúr úgy emlékezett, hogy az 1-es nem szerepel a kódban. Így a lehetséges páratlan számjegyek a 3, 5, 7, 9. Rögzítsük le az első számjegyet a lehető legkisebb páros számjegyre, ami a 2-es, valamint a második számjegyet a lehető legkisebb páratlan számjegyre, ami a 3-as. Ezután rögzítsük a 3. számjegyet is le a lehető legkisebb páratlan számjegyre, ami a 3 (lehetnek egyforma számjegyek).

Ekkor az utolsó helyre bekerülhet a 2, 4, 6, 8 valamelyike, ami 4 lehetőséget jelent. **(1 pont)**

Ha a harmadik pozíción a 3-as számjegyet az 5, 7 vagy 9 számjegyekre cseréljük szintén 4 – 4 lehetőséget kapunk, így  $4 \cdot 4 = 16$  lehetőségnél tartunk. **(1 pont)**

A második pozíción a 3-as számjegy helyett még elhelyezhetjük az 5, 7 vagy 9 számjegyeket, így a lehetőségek száma  $4 \cdot 16 = 64$ -re növekszik. **(1 pont)**

Végül pedig az első pozíción a 2-es számjegy helyére még a 4, 6 és 8 számjegyek kerülhetnek, ami  $4 \cdot 64$  lehetőséget jelent így összesen. **(1 pont)**

A szorzatot nem is érdemes kiszámítani, hisz jól mutatja, hogy az előző alpont 64 lehetőségénél 4-szer több lehetőség van ebben az esetben. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból

**(1 pont)**

a)

1. 

1	0	páros	páratlan
---	---	-------	----------

 $\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$  lehetőség

2. 

1	páros	0	páratlan
---	-------	---	----------

 $\rightarrow 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16$  lehetőség

3. 

páratlan	0	páros	1
----------	---	-------	---

 $\rightarrow 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 16$  lehetőség

4. 

páratlan	páros	0	1
----------	-------	---	---

 $\rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16$  lehetőség

**(2 pont)**

Összesen  $4 \cdot 16 = 64$  lehetőséget kellene kipróbálnia, hogy biztosan kinyithassa a széfet. Erre  $64 \cdot 5 = 320$  percre lenne szüksége. **(1 pont)**

10:00 órától 15:00 óráig 5 óra = 300 perc van, így nem lesz ideje minden lehetőséget kipróbálni, így 15:00 órakor Artúr nem biztos, hogy ehet a ritka csokoládéból. **(1 pont)**

b) 

páros	páratlan	páratlan	páros
-------	----------	----------	-------

A használható páros számjegyek: 2, 4, 6, 8

A használható páratlan számjegyek: 3, 5, 7, 9

**(1 pont)**

A lehetőségek száma így  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \cdot 4$ , mivel lehetnek ugyanolyan számjegyek is.

**(2 pont)**

Tehát a lehetséges kódok száma a négyszeresére nőtt.

**(1 pont)**

■