V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

X. osztály

1. feladat. a) Adottak az $x, y \in (1, 2022)$ számok, amelyekre fennáll az $x^2 + y^2 = 2023^2$ összefüggés. Bizonyítsd be, hogy

$$\log_{2023-x} y + \log_{2023+x} y = 2 \cdot \log_{2023-x} y \cdot \log_{2023+x} y.$$

b) Igazold, hogy bármely $a, b, c > 1$ valós számok esetén

$$\sqrt{\log_a(b^{\log_a b}) + \log_b(c^{\log_b c})} + \sqrt{\log_b(a^{\log_b a}) + \log_c(b^{\log_c b})} \geq 2\sqrt{2}.$$

2. feladat. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b > 0$ esetén adottak a $z_1 = a + b \cdot i$ és $z_2 = \dfrac{1 - \overline{z_1}}{1 + \overline{z_1}}$ komplex számok úgy, hogy $z_1 - z_2$ és z_2^2 valósak. Határozd meg a z_1 és z_2 komplex számokat!

3. feladat. Igazold, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ számok esetén

$$(2^{x-y} + 2^{z-y} - 1)(2^{y-z} + 2^{x-z} - 1)(2^{z-x} + 2^{y-x} - 1) \leq 1.$$

Határozd meg, mikor áll fenn egyenlőség!

4. feladat. Adott egy 11×11-es négyzetháló, amelynek négyzeteibe beírjuk a természetes számokat 1-től 121-ig valamilyen sorrendben. Igazold, hogy a négyzethálónak van olyan 2×2-es része, amelyben található négy szám összege legalább 210.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.