V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

XI. osztály

1. feladat. Legyen $\mathcal{M}$ azon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alakú mátrixok halmaza, amelyek teljesítik a $\det(A^3 - A^2) = 1$ összefüggést.

a) Határozd meg az $\mathcal{M}$ halmaz elemeit!

b) Oldd meg az $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ egyenletet az $\mathcal{M}$ halmazon!

2. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat úgy, hogy teljesüljön az $A^n = a_n A + b_n I_3$ egyenlőség, minden $n \geq 1$ esetén!

3. feladat. Adott a síkban hat pont, melyek közül bármely három nem kollineáris. A hat pont által meghatározott szakaszokból tízet megrajzolunk. Bizonyítsd be, hogy a hat pont között van három olyan pont, amelyeket összekötő szakaszok meg vannak rajzolva! Igaz-e az állítás, ha csak kilenc szakaszt rajzolunk meg? Indokold a válaszod!

4. feladat. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 > 0$ és $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n^2}$, minden $n \geq 1$ esetén. Tanulmányozd az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(na_n)_{n\geq 1}$ sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, akkor számítsd ki a határértéküket!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.