V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Számítsd ki az A szám értékét, ha

$$A = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} + \frac{25}{2\sqrt{75}} \right) - \left(\frac{12}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{\sqrt{27}}{27} - \left(\frac{\sqrt{48}}{5} + 2\sqrt{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Határozd meg az x természetes szám azon értékeit, amelyekre fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{2^x - 3}{4} < \frac{2^x + 5}{6}$$

és

$$\frac{3^x - 1}{5} > \frac{3^x + 9}{7}.$$

Matlap 9/2022, A:4637

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$A = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} + \frac{25}{2\sqrt{75}} \right) - \left(\frac{12}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{\sqrt{27}}{27} - \left(\frac{\sqrt{48}}{5} + 2\sqrt{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{25}{10} - \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{3\sqrt{3}}{27} - \left(\frac{\sqrt{16}}{5} + 2 \right) =$$ **(1 pont)**

$$= 1 + \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{14}{5} =$$ **(1 pont)**

$$= \frac{7}{2} - \frac{27}{10} - \frac{14}{5} =$$ **(1 pont)**

$$= \frac{35 - 27 - 28}{10} = -\frac{20}{10} = -2$$ **(1 pont)**

b)

$$\frac{2^x - 3}{4} < \frac{2^x + 5}{6} \Leftrightarrow 3 \cdot (2^x - 3) < 2 \cdot (2^x + 5) \Leftrightarrow$$ **(1 pont)**

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot (3 - 2) < 19 \Leftrightarrow x \leq 4 \ \mathbf{(1)}$$ **(1 pont)**

$$\frac{3^x - 1}{5} > \frac{3^x + 9}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot (3^x - 1) > 5 \cdot (3^x + 9) \Leftrightarrow$$ **(1 pont)**

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot (7 - 5) > 52 \Leftrightarrow 3^x > 26 \Leftrightarrow x \geq 3 \ \mathbf{(2)}$$ **(1 pont)**

Az **(1)**, **(2)** és $x \in \mathbb{N}$ feltételek alapján $x \in \{3;\ 4\}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az $\overline{abcd}$ alakú természetes számokat, amelyekre fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{\overline{ab}}{5} + c + \frac{\overline{cd}+1}{4} = 12.$$

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát 20-szal:

$$4\overline{ab} + 20c + 5\overline{cd} + 5 = 240 \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$4\overline{ab} + 70c + 5d = 235 \Leftrightarrow \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$\Leftrightarrow 4\overline{ab} = 5 \cdot (47 - 14c - d) \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $4\overline{ab}$ legalább 40, ezért a jobb oldali zárójelben levő kifejezés legalább 8, így $c \in \{1;\ 2\}$ **(1 pont)**
Ha $c = 1$, akkor $4\overline{ab} = 5 \cdot (33 - d)$. A baloldali szám osztható 4-gyel $\Rightarrow d \in \{1;\ 5;\ 9\}$ **(1 pont)**
Ha $d = 1$, akkor $\overline{ab} = 40$, ha $d = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 35$, ha $d = 9 \Rightarrow \overline{ab} = 30$ **(1 pont)**
Ha $c = 2$, akkor $4\overline{ab} = 5 \cdot (19 - d) \Rightarrow d \in \{3;\ 7\}$ **(1 pont)**
Ha $d = 3$, akkor $\overline{ab} = 20$, ha $d = 7 \Rightarrow \overline{ab} = 15$ **(1 pont)**
A megoldások: 4011; 3515; 3019; 2023 és 1527. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát 20-szal:

$$4\overline{ab} + 20c + 5\left(\overline{cd} + 1\right) = 240 \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$40a + 4b + 70c + 5d = 235 \quad \textbf{(2 pont)}$$

Egy tag kivételével, az összefüggés minden tagja osztható 5-tel $\Rightarrow b \,\vdots\, 5 \Rightarrow b \in \{0;\ 5\}$ **(1 pont)**
Ha $b = 0 \Rightarrow 40a + 70c + 5d = 235 \Rightarrow 8a + 14c + d = 47$
Figyelembe véve, hogy $a \neq 0;\ c \neq 0 \Rightarrow c \in \{1;\ 2\}$ **(1 pont)**
Ha $c = 1 \Rightarrow 8a + d = 33 \Rightarrow (a;\ d) \in \{(3;\ 9)\,;(4;\ 1)\}$
Ha $c = 2 \Rightarrow 8a + d = 19 \Rightarrow a = 2;\ d = 3$ **(1 pont)**
Ha $b = 5 \Rightarrow 40a + 70c + 5d = 215 \Rightarrow 8a + 14c + d = 43$
Figyelembe véve, hogy $a \neq 0;\ c \neq 0 \Rightarrow c \in \{1;\ 2\}$ **(1 pont)**
Ha $c = 1 \Rightarrow 8a + d = 29 \Rightarrow a = 3;\ d = 5$
Ha $c = 2 \Rightarrow 8a + d = 15 \Rightarrow a = 1;\ d = 7$ **(1 pont)**
Megoldások: 3019; 4011; 2023; 3515; 1527. **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát 20-szal:

$$4\overline{ab} + 20c + 5\left(\overline{cd} + 1\right) = 240 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$40a + 4b + 70c + 5d = 235 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Észrevesszük, hogy $c \leq 3$
Figyelembe véve, hogy $a \neq 0$; $c \neq 0 \Rightarrow c \in \{1;\ 2\}$ **(1 pont)**
Ha $c = 1 \Rightarrow 40a + 4b + 5d = 165$
Egy tag kivételével, az összefüggés minden tagja osztható 5-tel $\Rightarrow b \vdots 5 \Rightarrow b \in \{0;\ 5\}$ **(1 pont)**
Ha $b = 0 \Rightarrow 40a + 5d = 165 \Rightarrow 8a + d = 33 \Rightarrow (a;\ d) \in \{(3;\ 9);(4;\ 1)\}$
Ha $b = 5 \Rightarrow 40a + 5d = 145 \Rightarrow 8a + d = 29 \Rightarrow a = 3;\ d = 5$ **(1 pont)**
Ha $c = 2 \Rightarrow 40a + 4b + 5d = 95$
Egy tag kivételével, az összefüggés minden tagja osztható 5-tel $\Rightarrow b \vdots 5 \Rightarrow b \in \{0;\ 5\}$
Ha $b = 0 \Rightarrow 40a + 5d = 95 \Rightarrow 8a + d = 19 \Rightarrow a = 2;\ d = 3$ **(1 pont)**
Ha $b = 5 \Rightarrow 40a + 5d = 75 \Rightarrow 8a + d = 15 \Rightarrow a = 1;\ d = 7$ **(1 pont)**
Megoldások: 3019; 4011; 3515; 2023; 1527. **(1 pont)**

■

Megjegyzés.

1-2 megoldás kitalálása, levezetés nélkül. **(1 pont)**
Az összes megoldás felírása, levezetés nélkül. **(2 pont)**

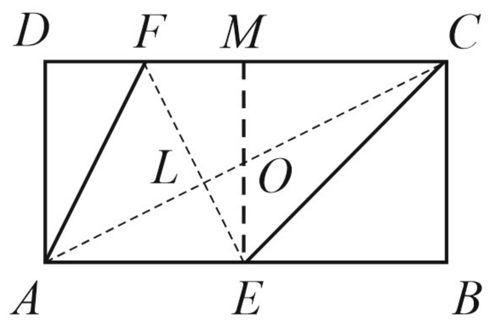
3. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2 \cdot BC$, E az AB oldal felezőpontja, F pedig a DC oldal olyan pontja, amelyre $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{3}$. Tudjuk, hogy $AC = 20$ cm.

a) Igazold, hogy $AC \perp EF$!

b) Számítsd ki az $AECF$ négyszög területét!

c) Mekkora az $ABCD$ téglalap területe?

Simon József, Csíkszereda



Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen M a DC oldal felezőpontja $\Rightarrow F$ a DM oldal felezőpontja. Legyen $AC \cap ME = \{O\}$. Mivel $AECM$ paralelogramma $\Rightarrow O$ az ME szakasz felezőpontja. (ábra) **(1 pont)**

Legyen $FE \cap AC = \{L\}$. $AEO_\triangle \equiv EMF_\triangle$ (b-b eset) **(1 pont)**

$\Rightarrow \widehat{EAL} \equiv \widehat{LEO}$, de $\widehat{LEO} + \widehat{AEL} = 90° \Rightarrow \widehat{EAL} + \widehat{AEL} = 90°$ **(1 pont)**

Így $\widehat{ALE} = 90° \Rightarrow AC \perp EF$. **(1 pont)**

b)

$$T_{AECF} = T_{AEF} + T_{CEF} = \frac{EF \cdot AL}{2} + \frac{EF \cdot CL}{2} = \frac{EF}{2} \cdot (AL + CL) = \frac{EF \cdot AC}{2}. \quad \textbf{(1,5 pont)}$$

$$AC = 20\ cm,\ AO = \frac{AC}{2};\ EF = AO \Rightarrow EF = 10 \text{ cm}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Így

$$T_{AECF} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ cm}^2. \quad \textbf{(0,5 pont)}$$

c)

$$T_{ADF} = \frac{1}{8} \cdot T_{ABCD}$$

és

$$T_{BEC} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD} \Rightarrow T_{ADF} + T_{BEC} = \frac{3}{8} \cdot T_{ABCD} \Rightarrow T_{AECF} = \frac{5}{8} \cdot T_{ABCD}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát

$$T_{ABCD} = \frac{8}{5} \cdot T_{AECF} = \frac{8}{5} \cdot 100 = \frac{800}{5} = 160 \text{ cm}^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen M a DC oldal felezőpontja $\Rightarrow F$ a DM oldal felezőpontja. Legyen $AC \cap ME = \{O\}$. Mivel $AECM$ paralelogramma $\Rightarrow O$ az ME szakasz felezőpontja. (ábra) **(1 pont)**

Legyen $FE \cap AC = \{L\}$. $AEO_\triangle \equiv EMF_\triangle$ (b-b eset) **(1 pont)**

$\Rightarrow \widehat{EAL} \equiv \widehat{LEO}$, de $\widehat{LEO} + \widehat{AEL} = 90° \Rightarrow \widehat{EAL} + \widehat{AEL} = 90°$ **(1 pont)**

Így $\widehat{ALE} = 90° \Rightarrow AC \perp EF$. **(1 pont)**

b) Legyen $BC = x \Rightarrow AB = 2x$
Az $ABC_\triangle$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 400 = 4x^2 + x^2 \Rightarrow \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$\Rightarrow x = 4\sqrt{5} \Rightarrow BC = 4\sqrt{5} \text{ cm}, \ AB = 8\sqrt{5} \text{ cm} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Legyen $FN \perp AE$, $N \in AE \Rightarrow FNAD$ téglalap $\Rightarrow FN = 4\sqrt{5}$ cm
$AEMD$ négyzet $\Rightarrow EM = 4\sqrt{5}$ cm

$$T_{AECF} = T_{AEF} + T_{FEC} = \frac{AE \cdot FN}{2} + \frac{FC \cdot EM}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} + \frac{6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 40 + 60 = 100 \text{ cm}^2$$
(2 pont)

c)
$$T_{ABCD} = AB \cdot BC = 8\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 160 \text{ cm}^2 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

4. feladat (10 pont)**.** Észak- és Dél-Meseország között egy olyan átjáró van, amelyen ha áthalad egy sárkány észak-dél irányban, fejeinek száma megkétszereződik, viszont ha dél-észak irányban kel át, fejeinek száma kettővel csökken. Egy 20 tagú sárkányokból álló csoport egyik nap átkelt, a másik nap visszajött az átjárón. Visszatérésük után összesen 8 fejjel többel rendelkeztek, mint amikor elindultak. Az utazás során egyetlen sárkánynak sem esett bántódása (mindvégig minden sárkánynak legalább egy feje volt).

a) Hány feje lehetett a sárkányoknak összesen az indulás előtt?
b) Legtöbb hányféle fejű sárkány lehetett a csoportban visszaérkezésük pillanatában?
c) Az utazás során legtöbb hány feje lehetett az egyik sárkánynak?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Jelöljük az összes sárkányfejek számát induláskor x-szel. Annak megfelelően, hogy a sárkányok az átkelőn először északról délre vagy délről északra haladnak át, két különböző esetet kell tárgyalnunk. **(1 pont)**

I. eset: észak dél irány
Ekkor az átjárón való első átkelés után a sárkányoknak $2x$ fejük lesz összesen, majd a visszatérés után $2x - 2 \cdot 20 = 2x - 40$, ami a feladat szerint 8-cal több, mint induláskor, így felírható a $2x - 40 = x + 8$ egyenlet, ahonnan $x = 48$. **(1 pont)**

Ebben az esetben már induláskor minden sárkány legalább kétfejű kellett legyen, hiszen 1 fej esetén visszatéréskor az adott sárkány fej nélkül maradt volna, ami nem lehet. **(1 pont)**

Mivel minden sárkány legalább 2 fejű, a legtöbbféle sárkányt akkor kapjuk, ha a fennmaradó $48 - 2 \cdot 20 = 8$ sárkányfejet a lehető legtöbb különböző darabszámú csoportra bontjuk, és úgy osztjuk szét azokat. Ekkor $8 = 1 + 2 + 5$ vagy $8 = 1 + 3 + 4$, tehát legfeljebb négyféle sárkány lehet (pl. 2, 3, 4, 7 vagy 2, 3, 5, 6 fejű). **(1 pont)**

Mivel minden sárkány legalább 2 fejű, a legtöbb fejű sárkányt úgy kapjuk, ha a fennmaradó 8 fej egy sárkányé, így a legtöbb fejű sárkány induláskor legfeljebb 10 fejű, az első átkelés után 20 fejű, majd érkezéskor 18 fejű. (**1 pont**)

II. eset: dél észak irány
Ekkor az átjárón való első átkelés után a sárkányoknak $x - 2 \cdot 20$ fejük lesz összesen, majd a visszatérés után $2 \cdot (x - 40)$, ami a feladat szerint 8-cal több, mint induláskor, így felírható a $2 \cdot (x - 40) = x + 8$ egyenlet, ahonnan $x = 88$. (**1 pont**)

Ebben az esetben már induláskor minden sárkány legalább háromfejű kell legyen, hiszen mivel az első átkelés után két fejet vesztenek, az ennél kevesebb fejűek fej nélkül maradnának, ami nem lehet. (**1 pont**)

Mivel minden sárkány legalább 3 fejű, a legtöbbféle sárkányt akkor kapjuk, ha a fennmaradó $88 - 3 \cdot 20 = 28$ sárkányfejet a lehető legtöbb különböző darabszámú csoportra bontjuk, és úgy osztjuk szét azokat. Ekkor $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, tehát legfeljebb nyolcféle sárkány lehet (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, illetve 10 fejű). (**1 pont**)

Mivel minden sárkány legalább 3 fejű, a legtöbb fejű sárkányt úgy kapjuk, ha a fennmaradó 28 fej egy sárkányé, így a legtöbb fejű sárkány induláskor legfeljebb 31 fejű, az első átkelés után 29 fejű, majd érkezéskor 58 fejű. (**1 pont**)

■