V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

XI. osztály

1. feladat (10 pont). Legyen $\mathcal{M}$ azon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alakú mátrixok halmaza, amelyek teljesítik a $\det(A^3 - A^2) = 1$ összefüggést.

a) Határozd meg az $\mathcal{M}$ halmaz elemeit!

b) Oldd meg az $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ egyenletet az $\mathcal{M}$ halmazon!

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A $\det(A^3 - A^2) = 1$ feltétel egyenértékű a $(\det A)^2 \cdot \det(A - I_2) = 1$ egyenlőséggel. Mivel az A mátrix egész együtthatós, ezért $\det A$ és $\det(A - I_2)$ egész számok, így a $(\det A)^2 \cdot \det(A - I_2) = 1$ egyenlőségből adódik, hogy $\det A = \pm 1$ és $\det(A - I_2) = 1$. **(1 pont)**

Mivel $\det(A - I_2) = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ 1 & c-1 \end{vmatrix} = (a-1)(c-1) - b = ac - a - c + 1 - b$, így a $\det(A - I_2) = 1$ összefüggés átírható $ac - b = a + c$ alakba, ahol $ac - b = \det(A)$ a mátrix determinánsa és $a + c = \mathrm{Tr}\,(A)$ a mátrix nyoma. A $\det A = \pm 1$ összefüggést is figyelembe véve azt kaptuk, hogy $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = \pm 1$. **(1 pont)**

Két esetet különböztetünk meg. Ha $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = 1$, akkor $a + c = 1$ és $ac - b = 1$, ahonnan kapjuk, hogy $c = 1 - a$ és $b = a - a^2 - 1$. Tehát ebben az esetben a keresett mátrixok $A = \begin{pmatrix} a & a - a^2 - 1 \\ 1 & 1 - a \end{pmatrix}$ alakúak, ahol $a \in \mathbb{Z}$. Ha $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = -1$, akkor $a + c = -1$ és $ac - b = -1$, ahonnan kapjuk, hogy $c = -1 - a$ és $b = 1 - a - a^2$. Tehát ebben az esetben a keresett mátrixok $A = \begin{pmatrix} a & 1 - a - a^2 \\ 1 & -1 - a \end{pmatrix}$ alakúak, ahol $a \in \mathbb{Z}$. **(2 pont)**

b) A Cayley–Hamilton-tétel szerint $A^2 - \mathrm{Tr}\,(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$. Az előző alpont alapján az $\mathcal{M}$ halmaz elemeire teljesül, hogy $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = \pm 1$. **(1 pont)**
A $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = 1$ esetben a Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - A + I_2 = O_2$, tehát $A^2 = A - I_2$. Ezt szorozva az A mátrixszal kapjuk, hogy $A^3 = A^2 - A = (A - I_2) - A = -I_2$, ami nem lehetséges. **(1 pont)**
A $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = -1$ esetben a Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 + A - I_2 = O_2$, tehát $A^2 = -A + I_2$. Ezt szorozva az A mátrixszal kapjuk, hogy $A^3 = -A^2 + A = -(-A + I_2) + A = {}$ $= 2A - I_2$. **(1 pont)**

Innen $2A = A^3 + I_2 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -22 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$, így $A = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. (**2 pont**)

Megjegyzés. Az egész együtthatós mátrixok halmazán is megoldható az $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ egyenlet. A $(\det A)^3 = \det(A^3) = -1$ alapján kapjuk, hogy $\det(A) = -1$. A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - t \cdot A - I_2 = O_2$, ahol $t = \operatorname{Tr}(A)$ a mátrix nyoma. Ezt az összefüggést szorozva A-val következik, hogy

$$A^3 = tA^2 + A = (t^2+1)A + tI_2. \tag{1}$$

Kiszámítjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left[(t^2+1)A + tI_2\right] &= \operatorname{Tr}\left[(t^2+1)A\right] + \operatorname{Tr}(tI_2) = (t^2+1)\operatorname{Tr}(A) + t\operatorname{Tr}(I_2) \\ &= (t^2+1)\cdot t + t \cdot 2 = t^3 + 3t,\end{aligned}$$

így az (1) alapján a $t = \operatorname{Tr}(A)$ nyom teljesíti a $t^3 + 3t + 4 = 0$ egyenletet. Ennek az egyenletnek $t = -1$ az egyetlen egész gyöke. Az (1) összefüggés alapján $A^3 = 2A - I_2$, ahonnan

$$A = \frac{1}{2}(A^3 + I_2) = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

■

2. feladat (10 pont)**.** Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat úgy, hogy teljesüljön az $A^n = a_n A + b_n I_3$ egyenlőség, minden $n \geq 1$ esetén!

(***)

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Ha léteznek az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ számsorozatok, akkor egyértelműek, mivel az A nem az I_3 mátrix többszöröse. Észrevesszük, hogy $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_3$ és $A^2 = 1 \cdot A + 2 \cdot I_3$, ahonnan $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ és $b_1 = 0$, $b_2 = 2$. (**1 pont**)
Az $A^{n+1} = A^n \cdot A = (a_n A + b_n I_3) \cdot A = (a_n + b_n)A + 2a_n I_3$ és $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$ alapján $a_{n+1} = a_n + b_n$ és $b_{n+1} = 2a_n$, minden $n \geq 1$ esetén. (**2 pont**)
Innen az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra az

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \ \forall\, n \geq 1$$

rekurzió írható fel. (**1 pont**)
Ez a rekurzió átírható $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$ alakba, melynek karakterisztikus egyenlete $r^2 - r - 2 = 0$.
A karakterisztikus egyenlet gyökei -1 és 2, (**2 pont**)
tehát az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagja $a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 2^n$ alakú, minden $n \geq 1$ esetén, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Az $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ tagok segítségével kiszámolható, hogy $\alpha = -\frac{1}{3}$ és $\beta = \frac{1}{3}$. (**2 pont**)
Innen

$$a_n = -\frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} \cdot 2^n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} \text{ és } b_n = 2a_{n-1} = 2 \cdot \frac{2^{n-1} + (-1)^{n-2}}{3} = \frac{2^n + 2\cdot(-1)^n}{3},$$

minden $n \geq 1$ esetén. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha léteznek az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ számsorozatok, akkor egyértelműek, mivel az A nem az I_3 mátrix többszöröse. Az A mátrixot hatványozva észrevesszük, hogy

$$\begin{aligned} A^1 &= 1\cdot A + 0\cdot I_3,\\ A^2 &= 1\cdot A + 2\cdot I_3,\\ A^3 &= 3\cdot A + 2\cdot I_3,\\ A^4 &= 5\cdot A + 6\cdot I_3,\\ A^5 &= 11\cdot A + 10\cdot I_3. \end{aligned}$$ **(1 pont)**

Általánosítjuk a kapott eredményt:

$$A^n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3}\cdot A + \frac{2^n + 2\cdot(-1)^n}{3}\cdot I_3, \tag{2}$$

minden $n \geq 1$ esetén. **(2 pont)**
Ezt az egyenlőséget matematikai indukcióval igazoljuk. Az $n = 1$ esetben

$$A^1 = \frac{2^1 + (-1)^{1-1}}{3}\cdot A + \frac{2^1 + 2\cdot(-1)^1}{3}\cdot I_3 = \frac{3}{3}\cdot A + \frac{0}{3}\cdot I_3,$$

tehát ebben az esetben a képlet helyes. **(1 pont)**
Feltételezzük, hogy $n = k$ esetén is helyes a képlet, vagyis $A^k = \frac{2^k+(-1)^{k-1}}{3}\cdot A + \frac{2^k+2\cdot(-1)^k}{3}\cdot I_3$.
Bizonyítjuk, hogy $n = k + 1$ esetén helyes a képlet:

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A\cdot A^k &= A\cdot\left(\frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}\cdot A + \frac{2^k + 2\cdot(-1)^k}{3}\cdot I_3\right)\\ &= \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}\cdot A^2 + \frac{2^k + 2\cdot(-1)^k}{3}\cdot A\\ &= \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}\cdot (A + 2I_3) + \frac{2^k + 2\cdot(-1)^k}{3}\cdot A\\ &= \left(\frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} + \frac{2^k + 2\cdot(-1)^k}{3}\right)\cdot A + 2\cdot\frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}\cdot I_3\\ &= \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3}\cdot A + \frac{2^{k+1} + 2\cdot(-1)^{k+1}}{3}\cdot I_3. \end{aligned}$$ **(3 pont)**

A matematikai indukció módszere alapján a (2) egyenlőség igaz, minden $n \geq 1$ esetén. **(1 pont)**
Tehát a keresett sorozatok $a_n = \frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$ és $b_n = \frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$, minden $n \geq 1$ esetén. **(1 pont)**
■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha léteznek az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ számsorozatok, akkor egyértelműek, mivel az A nem az I_3 mátrix többszöröse. Kiszámoljuk, hogy $A^2 = A + 2I_3$, ahonnan $B = A + I_3$ jelöléssel kapjuk, hogy $B^2 = 3B$.
(2 pont)
Innen adódik, hogy $B^n = 3^{n-1}B$, minden $n \geq 1$ esetén. **(1 pont)**

Mivel a B és I_3 mátrixok szorzása felcserélhető, a Newton binomiális tétele alapján

$$
\begin{aligned}
A^n &= (B - I_3)^n && \textbf{(1 pont)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k B^k && \textbf{(1 pont)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k B^k + (-1)^n I_3 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 3^{k-1} B + (-1)^n I_3 && \textbf{(1 pont)}\\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 3^k\right) B - \frac{(-1)^n}{3} B + (-1)^n I_3 &&\\
&= \frac{(3-1)^n}{3} B - \frac{(-1)^n}{3} B + (-1)^n I_3 && \textbf{(1 pont)}\\
&= \frac{2^n - (-1)^n}{3} B + (-1)^n I_3 = \frac{2^n - (-1)^n}{3}(A + I_3) + (-1)^n I_3 &&\\
&= \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3, && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}
$$

minden $n \geq 1$ esetén. Innen $a_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3}$ és $b_n = \frac{2^n + 2\cdot(-1)^n}{3}$, minden $n \geq 1$ esetén. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Adott a síkban hat pont, melyek közül bármely három nem kollineáris. A hat pont által meghatározott szakaszokból tízet megrajzolunk. Bizonyítsd be, hogy a hat pont között van három olyan pont, amelyeket összekötő szakaszok meg vannak rajzolva! Igaz-e az állítás, ha csak kilenc szakaszt rajzolunk meg? Indokold a válaszod!

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Jelöljük a pontokat A, B, C, D, E és F betűkkel. Ha az adott pontok mindegyike legfeljebb másik három ponttal lenne összekötve, akkor legfeljebb $C_6^2 = \frac{6\cdot 3}{2} = 9$ szakasz lenne megrajzolva. **(3 pont)**

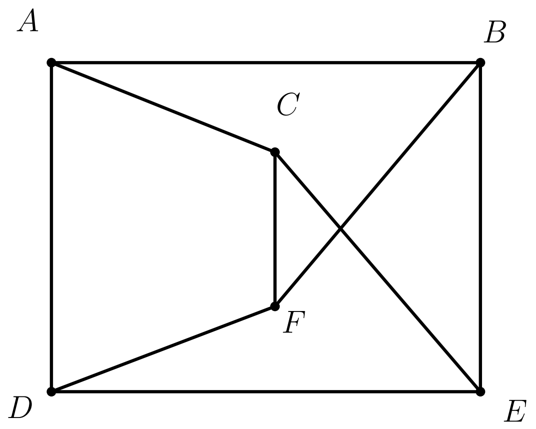
Ezért ha 10 szakaszt rajzoltunk be, akkor a skatulyaelv alapján lesz olyan pont, tegyük fel az A pont, amely négy másik ponttal van összekötve. Ezek a pontok legyenek B, C, D, E. **(1 pont)**

Ha a B, C, D és E pontok közül kettőt összeköt még egy megrajzolt szakasz, akkor ez a két pont az A-val együtt egy megrajzolt háromszög csúcsai. **(1 pont)**

Ha a B, C, D és E pontokat összekötő szakaszok nincsenek megrajzolva, akkor a fennmaradó 6 szakasz egyik végpontja biztosan az F pont. Ez viszont nem lehetséges, mert az F pontból csak 5 pontba tudunk szakaszt rajzolni. **(1 pont)**

Tehát ha 10 szakasz van megrajzolva, akkor biztosan találunk háromszöget melynek csúcsai az adott pontok. **(1 pont)**

Ha csak 9 szakaszt kell megrajzoljunk, akkor ki tudjuk küszöbölni a háromszög keletkezését, ahogy az alábbi ábrán látható. **(2 pont)**



■

4. feladat (10 pont)**.** Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 > 0$ és $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+na_n^2}$, minden $n \geq 1$ esetén. Tanulmányozd az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(na_n)_{n\geq 1}$ sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, akkor számítsd ki a határértéküket!

Matlap 10/2022, L:3524

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel $a_1 > 0$, következik, hogy $a_2 = \frac{a_1}{1+a_1^2} > 0$. Matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $a_n > 0$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(1 pont)**
Mivel $a_{n+1} - a_n = -\frac{na_n^3}{1+na_n^2} < 0$, minden $n \geq 1$ esetén, következik, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, ahonnan következik, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens. **(2 pont)**
Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ a sorozat határértéke. Feltételezzük, hogy $l \neq 0$. Ekkor a rekurziós képletben határértékre térve, kapjuk, hogy $l = 0$, ami ellentmondáshoz vezet. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **(1 pont)**

Legyen $b_n = na_n$, $n \geq 1$. Ekkor $b_1 = a_1$ és $b_2 = 2a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1^2} \leq 1$. **(1 pont)**
A $b_{n+1} - 1 = \frac{(n+1)b_n}{b_n^2+n} - 1 = \frac{(1-b_n)(b_n-n)}{b_n^2+n}$ összefüggésből matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $b_n \leq 1$, minden $n \geq 2$ esetén. **(1 pont)**
A $0 < b_n \leq 1$ alapján $b_{n+1} - b_n = \frac{b_n(1-b_n^2)}{b_n^2+n} \geq 0$, minden $n \geq 2$ esetén, ahonnan következik, hogy a $(b_n)_{n\geq 2}$ sorozat növekvő. Ezenkívül a sorozat felülről korlátos, ezért konvergens. Tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in (0, \infty)$ határérték. **(1 pont)**
Mivel $b_n = na_n = \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$, ahol az $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, ezért teljesülnek a Stolz–Cèsaro-tétel feltételei. De

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1+na_n^2}{a_n} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = \frac{1}{b}.$$

Ez a határérték létezik és a Stolz–Cèsaro-tétel alapján megegyezik a $b = \lim\limits_{n\to\infty} na_n$ határértékkel, így azt kapjuk, hogy $b = \frac{1}{b}$, ahonnan $b = 1$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$. **(2 pont)**

■