V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

XII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Az $M = (-1, 2)$ halmazon értelmezzük a „$*$" műveletet úgy, hogy $x * y = \frac{xy + 4(x+y) - 2}{2xy - (x+y) + 5}$, bármely $x, y \in (-1, 2)$ esetén. Tudjuk, hogy $(M, *)$ Abel-féle csoport.

a) Igazold, hogy az $f\colon (0, \infty) \to (-1, 2)$, $f(x) = \frac{2-x}{1+x}$ függvény egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és $(M, *)$ csoportok közt!

b) Igazold, hogy
$$\left(\frac{2 \cdot 2023! - 1}{2023! + 1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \ldots * \left(-\frac{2021}{2024}\right) = 1.$$

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az f függvény izomorfizmus, hogyha f bijektív és művelettartó, vagyis $f(xy) = f(x) * f(y)$, minden $x, y \in (0, \infty)$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$f(xy) = \frac{2 - xy}{1 + xy}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
f(x) * f(y) &= \frac{f(x)f(y) + 4(f(x) + f(y)) - 2}{2f(x)f(y) - (f(x) + f(y)) + 5} \\
&= \frac{\frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{2-y}{1+y} + 4 \cdot \left(\frac{2-x}{1+x} + \frac{2-y}{1+y}\right) - 2}{2 \cdot \frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{2-y}{1+y} - \left(\frac{2-x}{1+x} + \frac{2-y}{1+y}\right) + 5} \\
&= \frac{4 - 2x - 2y + xy + 4(2 - x + 2y - xy + 2 - y + 2x - xy) - 2(1 + x + y + xy)}{2(4 - 2x - 2y + xy) - (2 - x + 2y - xy + 2 - y + 2x - xy) + 5(1 + x + y + xy)} \\
&= \frac{18 - 9xy}{9 + 9xy} = \frac{2 - xy}{1 + xy},
\end{aligned} \tag{2}$$

minden $x, y \in (0, \infty)$ esetén. Tehát az (1) és (2) összefüggések alapján $f(xy) = f(x) * f(y)$, minden $x, y \in (0, \infty)$ esetén, vagyis az f függvény csoportmorfizmus. **(2 pont)**
Az f függvény deriválható a $(0, \infty)$ intervallumon és $f'(x) = \frac{-3}{(1+x)^2} < 0$, minden $x \in (0, \infty)$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan csökkenő, tehát az f injektív. **(1 pont)**
Az f függvény folytonos a $(0, \infty)$ intervallumon, az f szigorúan csökkenő, illetve $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$ és $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 2$, ezért az f képe $\operatorname{Im} f = (-1, 2)$, tehát az f szürjektív. Mivel az f injektív és szürjektív, ezért az f bijektív. **(1 pont)**

b) Bevezetjük az $a = \left(\frac{2\cdot 2023!-1}{2023!+1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \ldots * \left(-\frac{2021}{2024}\right)$ jelölést. Észrevehető, hogy

$$\frac{2\cdot 2023!-1}{2023!+1} = \frac{2-\frac{1}{2023!}}{1+\frac{1}{2023!}} = f\left(\frac{1}{2023!}\right) \quad \text{és} \quad -\frac{n}{n+3} = \frac{2-(n+2)}{1+(n+2)} = f(n+2),$$

minden $n \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$ esetén, tehát az a kifejezés a következő alakba írható át

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2\cdot 2023!-1}{2023!!+1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \ldots * \left(-\frac{2021}{2023}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2023!}\right) * f(3) * f(4) * \ldots * f(2023). \end{aligned}$$

(**2 pont**)

Az a) alpont szerint az f függvény egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és $(M, *)$ csoportok között, így

$$\begin{aligned} a &= f\left(\frac{1}{2023!}\right) * f(3) * f(4) * \ldots * f(2023) \\ &= f\left(\frac{1}{2023!} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2023\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

(**3 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az összes $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ primitiválható függvényt, amelyeknek az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitív függvényére teljesül, hogy $F(0) = 0$ és $F(x) + \ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Matlap 10/2022 L:3528

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Az $F(x) + \ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén egyenlőséget átrendezve az $F(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \ln f(x)$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan $F(x) = \ln\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{f(x)}\right)$. Ennek a kifejezésnek pedig megfelel az $e^{F(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{f(x)}$ egyenlőség, ahonnan kapjuk, hogy

$$f(x) \cdot e^{F(x)} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{3}$$

(**3 pont**)

Felhasználva, hogy $F'(x) = f(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a (3) összefüggés alapján írhatjuk, hogy $F'(x) \cdot e^{F(x)} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (**1 pont**)

Mivel $F'(x) \cdot e^{F(x)} = \left(e^{F(x)}\right)'$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén és $1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (x + \sqrt{1+x^2})'$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, a (3) összefüggés az $\left(e^{F(x)}\right)' = (x + \sqrt{1+x^2})'$ függvényegyenlethez vezet. (**1 pont**)

Tudjuk, hogy ha $f'(x) = g'(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - g(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans. Így $e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2} + c$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (**1 pont**)

Az $F(0) = 0$ feltételből meghatározható a c konstans, éspedig $c = 0$. (**1 pont**)

Tehát $e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$, ahonnan $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (**1 pont**)

Így csak az $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$,

$$f(x) = F'(x) = \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

függvény teljesíti a kért feltételeket. (**1 pont**)

Megjegyzés. Az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ megoldás megsejtéséért és leellenőrzéséért összesen 3 pont jár.

■

3. feladat (10 pont)**.** Tekintsük azoknak az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögeknek a H_n halmazát, amelyek oldalhosszai $(2n+1)$-nél kisebb vagy egyenlő egész számok.

a) Hány eleme van a H_n halmaznak?

b) Az $n = 7$ esetben mennyi a valószínűsége annak, hogy tetszőlegesen választva egy háromszöget a H_7 halmazból, az tompaszögű háromszög legyen?

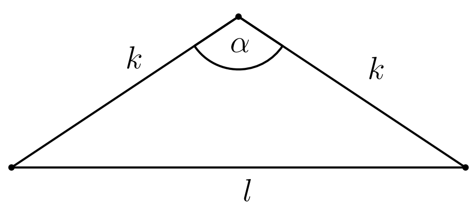
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Először megvizsgáljuk, hogy hány olyan háromszög van, melynek szárai k hosszúságúak, ahol $k \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$. A k, k, l egy ilyen háromszög oldalhosszai pontosan akkor, ha teljesül a háromszög-egyenlőtlenségek közül az $1 \leq l < 2k$ (a másik kettő automatikus), ugyanakkor $l \leq 2n+1$ és $l \neq k$. (**1 pont**)
Ha $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, akkor az $1 \leq l < 2k$ feltétellel együtt az $l \leq 2n+1$ feltétel is teljesül. Ebben az esetben a k szárhosszú háromszögek száma $2k-1$, és mivel $k \neq l$ következik, hogy $2k-2$ darab ilyen háromszög van. (**1 pont**)
Ha $k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n+1\}$, akkor az $1 \leq l < 2k$ és $l \leq 2n+1$ feltételekből kapjuk, hogy $1 \leq l \leq 2n+1$ és $l \neq k$, így k-tól függetlenül $2n$ darab háromszöget kapunk. (**1 pont**)
Ez azt jelenti, hogy a H_n halmaz elemeinek száma

$$\begin{aligned} |H_n| &= \sum_{k=1}^{n+1}(2k-2) + \sum_{k=n+2}^{2n+1} 2n = 2 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2(n+1) + 2n \cdot n \\ &= (n+1) \cdot n + 2n^2 = 3n^2 + n. \end{aligned}$$ (**1 pont**)

b) Egy egyenlő szárú háromszögben csak az alappal szemben fekvő szög lehet tompaszög, jelöljük ezt α-val A koszinusz tételből következik, hogy $\cos\alpha = \dfrac{2k^2 - l^2}{2k} < 0$, ha α tompaszög. Így a háromszögek közül azok lesznek tompaszögűek, melyekre teljesül az $1 \leq l < 2k$, $l \leq 2n+1$ és $l \neq k$ feltételek mellett az $l^2 > 2k^2$ feltétel is. (**2 pont**)



A feltételeknek megfelelő háromszögek oldalhosszai $n = 7$ esetén a következőek:

$$(2,2,3),(3,3,5),(4,4,6),(4,4,7),(5,5,8),(5,5,9),(6,6,9),$$
$$(6,6,10),(6,6,11),(7,7,10),(7,7,11),(7,7,12),(7,7,13),(8,8,12),$$
$$(8,8,13),(8,8,14),(8,8,15),(9,9,13),(9,9,14),(9,9,15),(10,10,15).$$

Tehát 21 kedvező esetünk van. **(2 pont)**

Az előző alpont alapján a lehetséges esetek száma $3 \cdot 7^2 + 7 = 154$, így a kért valószínűség $p = \frac{21}{154} = \frac{3}{22}$. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Számítsd ki az

$$\mathcal{I} = \int \frac{b^x - a^x + (xb^x + 1)\ln a - (xa^x + 1)\ln b}{x^2(ab)^x + x(a^x + b^x) + 1}\,\mathrm{d}x$$

integrált, ahol a és b pozitív valós számok és $x \in (0, \infty)$!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A nevezőt tényezőkre bontjuk

$$\begin{aligned} x^2(ab)^x + x(a^x + b^x) + 1 &= x^2a^xb^x + xa^x + xb^x + 1 \\ &= \underbrace{(xa^x + 1)}_{A}\underbrace{(xb^x + 1)}_{B}. \end{aligned}$$ **(1 pont)**

A fenti jelöléseket használva kapjuk, hogy $B - A = x(b^x - a^x)$, ahonnan $b^x - a^x = \frac{B-A}{x}$, így az eredeti integrál átírható

$$\mathcal{I} = \int \frac{\frac{1}{x}(B - A) + B\ln a - A\ln b}{AB}\,\mathrm{d}x.$$

alakba. **(2 pont)**

Az integrált felbontjuk két integrál különbségére a következőképpen:

$$\mathcal{I} = \underbrace{\int \frac{\frac{1}{x} + \ln a}{A}\,\mathrm{d}x}_{\mathcal{J}} - \underbrace{\int \frac{\frac{1}{x} + \ln b}{B}\,\mathrm{d}x}_{\mathcal{K}}.$$ **(2 pont)**

Az $\mathcal{J}$ integrálban szereplő törtet ha bővítjük xa^x-szel, vagyis $\frac{\frac{1}{x}+\ln a}{A} = \frac{a^x + xa^x\ln a}{xa^x(xa^x+1)}$, akkor a számlálóban egy függvény deriváltját kapjuk, azaz $\left(xa^x\right)' = a^x + xa^x\ln a$. **(1 pont)**

A $\mathcal{J} = \int \frac{a^x + xa^x\ln a}{xa^x\left(xa^x + 1\right)}\,\mathrm{d}x$ integrálban végrehajtva az $xa^x = t$, $\left(a^x + xa^x\ln a\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ változócserét, kapjuk, hogy

$$\mathcal{J} = \int \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln|t| - \ln|t+1| + \mathcal{C} = \ln\left|\frac{xa^x}{xa^x + 1}\right| + \mathcal{C}.$$ **(2 pont)**

Hasonlóan

$$\mathcal{K} = \int \frac{\frac{1}{x} + \ln b}{B} \, \mathrm{d}x = \ln \left| \frac{xb^x}{xb^x + 1} \right| + \mathcal{C}.$$

Tehát az eredeti integrál

$$\mathcal{I} = \ln\left(\frac{xa^x}{xa^x+1}\right) - \ln\left(\frac{xb^x}{xb^x+1}\right) + \mathcal{C} = \ln\left[\frac{a^x(xb^x+1)}{b^x(xa^x+1)}\right] + \mathcal{C}.$$ (**1 pont**)

■