V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

IX. osztály

1. feladat. Oldd meg az $\left[\dfrac{x^2+x}{2}+2021\right]=|x+2022|$ egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $|a|$ pedig a modulusát jelöli.

2. feladat. Igazold, hogy bármely $x, y, z > 0$ valós számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $2x\sqrt{yz} \leq x^2 + yz$;

b) $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\right)$;

c) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz} \leq \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$.

3. feladat. Egy 2023 oldalú szabályos sokszög csúcsai közül egyet zöldre, a többit fehérre vagy pirosra festjük. Tekintsük az összes olyan konvex sokszöget, amelyeknek csúcsai az adott sokszög csúcsai közül valók. Mely konvex sokszögekből van több és mennyivel: azokból, amelyeknek egyik csúcsa zöld, vagy azokból, amelyeknek nincs zöld csúcsa?

4. feladat. Az ABC háromszög síkjában lévő M pont szimmetrikusát az AB, AC és BC oldalak felezőpontjára nézve jelölje M_1, M_2 és M_3. Továbbá legyen A' a sík azon pontja, amelyre $\overrightarrow{A'A} = 2(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$. Igazold, hogy ha az A, A' és M pontok nem kollineárisak, akkor az $AG'A'M$ négyszög egy paralelogramma, ahol G' az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.