



Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2023. március 11.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Adott az ABC háromszög.

a) Igazold, hogy az A szög belső szögfelezője, és a B és C szögek külső szögfelezője összefut egy I_A pontban!

b) Legyen az I_A pont vetülete az AC , BC és AB egyenesre az M , N illetve P pont. Igazold, hogy ha $\overrightarrow{I_A M} + \overrightarrow{I_A P} = \overrightarrow{I_A N}$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú!

Gazeta Matematică

2. feladat. a) Oldd meg a valós számok halmazán az

$$[x]^2 - x = -0,99$$

egyenletet!

b) Igazold, hogy az $[x]^2 - x = a$ egyenletnek **nincs** valós megoldása bármely $a \leq -1$ esetén!

3. feladat. Ha az x, y, z pozitív valós számok esetén $x + y + z = 1$, igazold, hogy:

a) $1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{(1 - y)(1 - z)}{x^2 + x};$

b) $\frac{x^2 - yz}{x^2 + x} + \frac{y^2 - zx}{y^2 + y} + \frac{z^2 - xy}{z^2 + z} \leq 0.$

4. feladat. Határozd meg azokat a szigorúan növekvő $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényeket, amelyekre az $f(x) \cdot f(y)$ szám osztja a $(1 + 2x) \cdot f(y) + (1 + 2y) \cdot f(x)$ számot bármely x és y természetes szám esetén!

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.