MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2023. március 11.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Az $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvény esetén

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot f'(x) \geq 1\,, \qquad \text{bármely } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Igazold, hogy

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx \geq \pi - 2\,.$$

Gazeta Matematică

2. feladat. A $(G, \cdot)$ csoport semleges eleme e. Legyen H és K két valódi részcsoportja a G csoportnak úgy, hogy $H \cap K = \{e\}$ és $(G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$ zárt a G halmazon értelmezett műveletre nézve. Igazold, hogy $x^2 = e$ bármely $x \in G$ esetén!

3. feladat. Legyen $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény.
a) Igazold, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

b) Ha $f(0) = 0$ és f jobbról deriválható 0-ban, igazold, hogy léteznek, végesek és egymással egyenlőek a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx\right)$$

határértékek.

4. feladat. Legyen $f, g, h : A \longrightarrow A$ a nemnegatív valós számok $A = [0, \infty)$ halmazán értelmezett három függvény és $* : A \times A \longrightarrow A$ egy olyan művelet, amelyre

$$x * y = f(x) + g(y) + h(x) \cdot |x - y|\,, \qquad \text{bármely } x, y \geq 0.$$

Ha $(A, *)$ kommutatív monoid,
a) igazold, hogy a h függvény folytonos az A halmazon;
b) határozd meg az f, g és h függvényt!

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.