MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2023. március 11.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelyre $f(1) = e$ és $f(x+y) = e^{3xy} \cdot f(x) \cdot f(y)$, bármely $x, y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

2. feladat. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertálható mátrixok, amelyekre az $A + B^{-1}$ mátrix is invertálható és $\left(A + B^{-1}\right)^{-1} = A^{-1} + B$. Igazold, hogy $\det(AB) = 1$. Igaz a következtetés az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmazban is?

3. feladat. Adottak az $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ valós számok. Ha $f : [a, b] \to [a, b]$ egy olyan folytonos függvény, amelyre létezik $c, d \in (a, b)$ úgy, hogy $f(c) = a$ és $f(d) = b$, igazold, hogy az $f \circ f : [a, b] \to [a, b]$ függvénynek van legalább három fixpontja!
($x_0 \in D$ a $\varphi : D \to D$ függvény fixpontja, ha $\varphi(x_0) = x_0$.)

4. feladat. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $A^2 = B^2 = O_3$. Bizonyítsd be, hogy ha $AB = BA$, akkor $AB = O_3$. Igazold, hogy a fordított következtetés hamis!

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.